CONCOURS EXTERNE de RECRUTEMENT D'INGENIEURS DE L'ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE (I.E.N.A.C.)

MATHEMATIQUES **Durée : 3 h**
(Epreuve Commune)

I

Dans cette première partie, on se propose d'introduire la fonction $\Gamma(x)$ et d'en étudier les propriétés de continuité et de dérivabilité.

1)

a) Prouver que pour tout x réel strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$ est absolument convergente.

On note désormais Γ la fonction définie sur $]\,0,\ +\infty\,[$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt\ .$$

b) Etablir, pour tout x réel strictement positif, la relation $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Calculer $\Gamma(1)$. En déduire l'image par Γ de tout entier naturel non nul.

2)

Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $]\,0,\ +\infty\,[$ par

$$\phi_n(x) = \int_{1/n}^{n} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

a) Prouver que chacune des fonctions ϕ_n est continue.

b) Montrer que la suite (ϕ_n) converge vers $\Gamma(x)$, uniformément par rapport à x sur un intervalle que l'on précisera.

c) Prouver que la fonction $\Gamma(x)$ est continue sur $]\,0,\ +\infty\,[$.

3)

a) Montrer que pour tout x réel strictement positif et r entier naturel l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,(\,\mathrm{Log}\ t\,)^r\, e^{-t}\, dt$ est absolument convergente.

b) Prouver que, pour tout n, ϕ_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$.

c) Soit $b > a > 0$, montrer que, pour tout entier r positif, la suite $(\phi_n^{(r)})$ des dérivées d'ordre r converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction que l'on déterminera.

d) En déduire que $\Gamma(x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$ et exprimer pour tout entier positif r la dérivée d'ordre r de $\Gamma(x)$.

II

Dans cette partie on supposera n entier naturel non nul donné.

1) Montrer que, quel que soit $t \in [0, n]$ on a :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right) \leq e^{t/n} \; ; \; \left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq e^{-t/n} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{t^2}{n} \leq \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n$$

En déduire que pour tout $t \in [0, n]$ $\quad 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$

2) Soit x un réel strictement positif et f_n l'application définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } 0 < t \leq n \\ 0 \quad \text{si} \quad n < t \end{cases}$$

Montrer l'existence pour tout x réel strictement positif de $I_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt$.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (\Gamma(x) - I_n(x)) = 0$.

3)

a) k étant un entier naturel inférieur ou égal à n on pose :

$$A(k) = \int_0^1 u^{x+k-1} (1 - u)^{n-k}\, du \; , \; x \in]0, +\infty[$$

Ecrire, pour $k < n$, la relation liant A(k) et A(k+1). En déduire la valeur de $I_n(x)$.

En conclure que $\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(n!\, n^x \prod_{p=0}^{n} \frac{1}{x + p} \right)$.

b) Montrer que la suite $(C_m)_{m\in N^*}$ définie par $C_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \text{Log } m$ converge.

Soit c sa limite.

c) Etablir que pour tout x réel strictement positif on a

$$\lim_{n\to+\infty} x\, e^{cx} \prod_{k=1}^{n} \left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x/k}\right] = \frac{1}{\Gamma(x)}$$

III

1)

a) Montrer que si f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ dans un intervalle fermé [a,b] de R à valeurs dans R, alors

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b \sin(\lambda t)\, f(t)\, dt = 0 \; ; \; \lambda \in R$$

b) Montrer que l'application h définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 at}{\sin t} & \text{si} \quad 0 < t \le \dfrac{\pi}{2} \qquad \text{(a étant un réel fixé } 0 < a < 1\text{)} \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

c) Soit p un entier naturel et a un réel de l'intervalle ouvert]0,1[on pose

$\theta_p(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2p+1)t)\, h(t)\, dt.$

Montrer que $\lim_{p\to+\infty} \theta_p(a) = 0.$

Etablir une relation entre $\theta_p(a)$ et $\theta_{p-1}(a)$ pour $p \ge 1$ et déterminer $\theta_0(a)$.

2)

a) Soit $u(a) = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t} dt$ et $v(a) = \int_0^1 \frac{t-a}{1+t}\, dt$ où a est un réel de l'intervalle]0,1[.

Montrer que u(a) et v(a) existent et que $u(a) + v(a) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ où f est une fonction dépendant du réel a que l'on précisera.

b) Pour $p \in N$ et avec $a \in]0, 1[$ on note u_p et v_p les applications définies sur]0,1[par

$$u_p(a) = \sum_{k=0}^{p} \int_0^1 (-1)^k\, t^{k+a-1}\, dt \quad \forall p \in N$$

$$v_p(a) = \sum_{k=1}^{p} \int_0^1 (-1)^{k+1}\, t^{k-a-1}\, dt \text{ pour } p \ge 1$$

et $v_0(a) = 0$.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 t^{a-1} R_n^1(t)\, dt = 0$ et que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 t^{-a} R_n^2(t)\, dt = 0$

où $R_n^1(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^k$ et $R_n^2(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} t^{k-1}$

En déduire que les suites $\left(u_p(a)\right)_{p \in N}$ et $\left(v_p(a)\right)_{p \in N}$ convergent respectivement vers u(a) et v(a).

c) On appelle w_p l'application définie sur $]0,1[$ par

$$w_p(a) = u_p(a) + v_p(a) + 4\frac{\theta_p(a)}{\sin a\, \pi}$$

Pour $p \geq 1$ calculer $w_p(a) - w_{p-1}(a)$. Déterminer $w_p(a)$.

En déduire la valeur de $u(a) + v(a)$.

3) Soit r un réel de l'intervalle $]0,1[$. On considère l'application bijective F définie par

$$F : \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$$
$$(x,y) \longrightarrow (u,v) = \left(x + y, \frac{y}{x}\right)$$

Montrer que $F(S) \subset Q$ et $F^{-1}(P) \subset S$ sachant que

$$P = \left\{(u,v) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \text{ tq } u \in \left[r + \sqrt{r}, \frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{r}}\right], v \in \left[\sqrt{r}, \frac{1}{\sqrt{r}}\right]\right\}$$

$$Q = \left\{(u,v) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \text{ tq } u \in \left[2r, \frac{2}{r}\right], v \in \left[r^2, \frac{1}{r^2}\right]\right\}$$

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^* \text{ tq } x \in \left[r, \frac{1}{r}\right], y \in \left[r, \frac{1}{r}\right]\right\}$$

En déduire que si a est un réel de l'intervalle $]0,1[$ alors

$$\iint_P e^{-u} \frac{v^{a-1}}{1+v}\, du\, dv \leq \iint_S x^{-a} y^{a-1} e^{-(x+y)}\, dx\, dy \leq \iint_Q e^{-u} \frac{v^{a-1}}{1+v}\, du\, dv$$

et donner la valeur de $\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a)$.